

-184-

Rappel: Si $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) > 0$, n pair $\Rightarrow$ loc min en $x=c$
 $f^{(n)}(c) < 0$, n pair $\Rightarrow$ loc max en $x=c$
 Si $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$, n impair $\Rightarrow$ point d'inflexion

Développement limité: $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x=a$
 $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}_{P_f^n(x-a) - \text{la partie principale}} + \underbrace{(x-a)^n \mathcal{E}(x)}_{R_f^n(x-a) \text{ le reste}} - \text{le DL d'ordre } n \text{ de } f \text{ autour de } x=a.$
 $\lim_{x \rightarrow a} \mathcal{E}(x) = 0.$

Proposition Si $f: E \rightarrow F$ est n fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x=a$, alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de f autour de $x=a$.

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x=0$ d'ordre n ? $|x| < 1$
 $\frac{1}{1-x} = \underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}_{P_f^n(x)} + \underbrace{x^n(x+x^2+\dots)}_{\mathcal{E}(x)} = \underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n+x^n\mathcal{E}(x)}_{P_f^n(x)}.$

Opérations algébriques sur les DL.

Proposition Soient $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant le DL autour de $x=a$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = P_f^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x) = P_g^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_2(x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{array} \right.$$

Alors: (1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$P_{\alpha f + \beta g}^n(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$$

(2) $f(x) \cdot g(x)$ — " — — " —

$$P_{f \cdot g}^n(x) = P_f^n(x) P_g^n(x) = (a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n)(b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n),$$

où on ne conserve que les termes d'ordre $\leq n$.

(3) Si $b_0 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ sur E , $\frac{f(x)}{g(x)}$ — " —

$$P_{\frac{f}{g}}^n(x) = \frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)} = \frac{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}{b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n} \quad \text{où on ne conserve que les termes d'ordre } \leq n$$

Voir [DZ §5.4.10]

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ DL d'ordre 4 autour de $x=0$.

$$(1) \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{DL} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{= \frac{1}{1-(-x)}} = \frac{1}{2} (1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 + x^4 \mathcal{E}_1(x)) + \frac{1}{2} (1 - \cancel{x} + x^2 - \cancel{x^3} + x^4 + x^4 \mathcal{E}_2(x)) =$$

$$= \underline{1 + x^2 + x^4 + \mathcal{E}(x) \cdot x^4}.$$

$$(2) \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{E}_1(x)x^4) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{E}_2(x)x^4) =$$

$$= 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^4} + (-\cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^4}) + (x^2 + \cancel{x^3} + \cancel{x^4}) + (-\cancel{x^3} - \cancel{x^4}) + x^4 + \mathcal{E}(x)x^4 = 1 + x^2 + x^4 + \mathcal{E}(x)x^4.$$

$$(3) \frac{1}{1-x^2} \xrightarrow{\text{division polyn\u00f4mique}} \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{x^2}{x^2-x^4}} \left| \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} \right. \rightsquigarrow 1 + x^2 + x^4 + x^4 \mathcal{E}(x).$$

(4) Coefficients ind\u00e9termin\u00e9s $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\mathcal{E}(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\Rightarrow (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)(1-x^2) = 1$ jusqu'au l'ordre 4.

$$\left. \begin{array}{l} 1: a_0 = 1 \\ x: a_1 = 0 \\ x^2: a_2 - a_0 = 0 \\ x^3: a_3 - a_1 = 0 \\ x^4: a_4 - a_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 1 = a_2 = a_4 \\ a_1 = a_3 = 0 \end{array} \Rightarrow 1 + x^2 + x^4 + \mathcal{E}(x)x^4.$$

Proposition. DL d'une fonction composée.

Soit $f(x) = a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_1(x)$ - DL autour de $x=a$

$g(y) = g(0) + b_1 y + \dots + b_n y^n + y^n \mathcal{E}_2(y)$ - DL autour de $y=0$.

Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$,

$$P_{g \circ f}^n(x) = g(0) + b_1 (P_f^n(x-a)) + b_2 (P_f^n(x-a))^2 + \dots + b_n (P_f^n(x-a))^n \text{ où on ne conserve que les termes d'ordre } \leq n$$

[DZ, §5.4.12]

(5) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $g(y) = \frac{1}{1-y}$; $f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow g(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \mathcal{E}_1(y)y^4$; $f(x) = x^2 \leadsto$ remplacer $y = x^2$
 $\Rightarrow h(x) = 1 + x^2 + x^4 + \mathcal{E}(x)x^4$ DL pour f autour de $x=0$ d'ordre 4

Application de DL au calcul des limites.

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{(e^x - 1 - x)^2}$

$\frac{0}{0}$

Rappel:

$$\left\{ \begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned} \right.$$

formules de Taylor

$$(e^x - 1 - x)^2 \rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathcal{E}_1(x) x^4$$

$$\sinh^2(x) \rightarrow \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)^2 = x^2 - 2 \frac{x x^3}{3!} + \mathcal{E}_2(x) x^4 = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \mathcal{E}_2(x) x^4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x - x^2}{(e^x - 1 - x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{1}{3} x^4 + \mathcal{E}_2(x) \cdot \cancel{x^4} - \cancel{x^2}}{\frac{x^4}{4} + \mathcal{E}_1(x) \cdot x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} x^4 + \mathcal{E}_2(x) \cdot x^4}{\frac{x^4}{4} + \mathcal{E}_1(x) x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{E}_2(x)}{\frac{1}{4} + \mathcal{E}_1(x)} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exercice 1. Calculer la même limite par la règle Bernoulli - L'Hospital.

Exercice 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sinh x} - e^x}{x^3}$ Calculer avec les DL.

L'ordre du dénominateur est 3 $\Rightarrow$ il faut retenir les termes d'ordre jusqu'à 3 dans le numérateur.

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \mathcal{E}_1(y) \cdot y^3 ; \sinh x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{E}_2(x) \cdot x^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\sinh x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{E}_2(x) x^3 \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{E}_2(x) x^3 \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{E}_2(x) x^3 \right)^3 + \mathcal{E}_5(x) \cdot x^3 = \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{E}(x) \cdot x^3 = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{E}(x) \cdot x^3 \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{E}_3(x) \cdot x^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sinh x} - e^x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{E}(x) x^3) - (1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{E}_3(x) \cdot x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + \mathcal{E}_4(x) \cdot x^3}{x^3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Chapitre 6. Séries entières. [DZ, Annexe C]

§ 6.1. Rayon de convergence.

Déf L'expression $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est dite une série entière, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Le domaine de convergence $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$

la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $x \in \mathcal{D}$ est définie par la série entière.

Ex 1. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la série entière converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ex 2. $\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x-x_0)^k$, $a > 0$ Critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{a^{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a^k (x-x_0)^k} \right| = a |x-x_0|$$

Si $< 1 \Rightarrow$ la série converge
 $> 1 \Rightarrow$ la série diverge

$\Rightarrow$ Si $|x-x_0| < \frac{1}{a} \Rightarrow$ la série converge absolument.

Si $x = x_0 + \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ diverge

Si $x = x_0 - \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(-\frac{1}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ diverge

$\Rightarrow \mathcal{D} =]x_0 - \frac{1}{a}, x_0 + \frac{1}{a}[$

Théorème (Rayon de convergence) Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Alors il existe $r : 0 \leq r \leq +\infty$ tel que

- (1) la série converge absolument $\forall x : |x-x_0| < r$
- (2) la série diverge $\forall x : |x-x_0| > r$.

Remarques. (1) D est un intervalle qui contient x_0 et centré en x_0 .

(2) La convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être étudié séparément.

Voir $[DZ]$.

(3) Si $r \neq 0, r \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow D =$ un des 4 intervalles : $]x_0-r, x_0+r[$, $[x_0-r, x_0+r[$, $]x_0-r, x_0+r]$, $[x_0-r, x_0+r]$.

Si $r = 0 \Rightarrow D = \{x_0\}$ Ex. $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k \Rightarrow D = \{0\}$ (à vérifier)

Si $r = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$. Ex $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, $D = \mathbb{R}$.

Comment calculer le rayon de convergence ?

-19/-

Proposition. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

(1) Supposons que $a_k \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Si } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}$$

$$\text{on a : } r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$(2) \text{ Si } \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}.$$

Idée: (1) Critère de d'Alembert (2) Critère de Cauchy

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a_k (x-x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|x-x_0|}_{\text{const}} \underbrace{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\rightarrow \ell} = |x-x_0| \cdot \ell \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Si } |x-x_0| \cdot \ell < 1 \Rightarrow \text{conv. abs.} \\ \text{Si } |x-x_0| \cdot \ell > 1 \Rightarrow \text{div.} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Si } |x-x_0| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{la série converge} \\ \text{Si } |x-x_0| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{la série diverge} \end{array} \right\} \text{par déf, } \frac{1}{\ell} = r \text{ est le rayon de convergence.}$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; $a_n = \frac{1}{n 2^n} \Rightarrow r = ?$ $D = ?$

-192-

On utilise la Proposition (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n 2^n} \frac{(n+1) 2^{n+1}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2 = r$

$\Rightarrow$ le rayon de convergence $r=2 \Rightarrow D \supset]-2, 2[$

Si $x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ série harmonique, diverge $\Rightarrow \underline{2 \notin D}$

Si $x=-2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ série harmonique alternée, converge $\Rightarrow$
 $\underline{-2 \in D}$

Alors le domaine de convergence est $D = [-2, 2[$.

le rayon de convergence est $r=2$.

Q1

Le développement limité d'ordre 2 autour de $x=0$
de la fonction $f(x) = \frac{1}{2 - \frac{1}{1+x}}$ est

A. $\frac{1}{2} - x + x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$

B. $\frac{1}{2} + x - x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$

C. $1 - x + 2x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$

D. $1 + x - 2x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \mathcal{E}(y)y^2$$

$$= 1 - (x - x^2 + \mathcal{E}(x)x^2) + (x - x^2 + \mathcal{E}(x)x^2)^2 + \mathcal{E}_2(x)x^2 =$$

$$= 1 - x + x^2 + x^2 + \mathcal{E}_1(x)x^2 = 1 - x + 2x^2 + \mathcal{E}_1(x)x^2$$

$$\frac{1}{\frac{2+2x-1}{1+x}} = \frac{1+x}{1+2x} =$$

$$= (1+x) \frac{1}{1+2x} = (1+x) (1 - 2x + (2x)^2 + \mathcal{E}(x)(2x)^2) =$$

$$= 1 + x - 2x - 2x^2 + 4x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$$

$$= 1 - x + 2x^2 + \mathcal{E}(x)x^2$$